

Tre cilindri in equilibrio¹

Problema- Tre cilindri uguali sono accatastati, come si vede in figura, su un piano orizzontale. Il coefficiente di attrito radente tra i cilindri ed il piano è μ e quello tra un cilindro e l'altro è h . (Il coefficiente di attrito volvente è trascurabile.) Determina il valore minimodi μ e di h , perché il sistema sia in equilibrio.

Soluzione

Premessa

Per sistema in equilibrio in questo contesto si deve intendere che i tre cilindri sono fermi l'uno rispetto all'altro, con quelli di base poggiati sul piano orizzontale di riferimento. Per risolvere il problema sarà sufficiente applicare la seconda equazione cardinale della statica: la somma dei momenti delle forze agenti su uno dei tre cilindri, calcolando i momenti rispetto ad un polo qualsiasi, deve essere nulla.

Come procedere ?

Consideriamo i cilindri di centri O_1 , O_3 ed occupiamoci delle forze che tra gli stessi si esercitano nel punto di contatto indicato con B in figura.

Osserviamo che il cilindro C_1 (quello di centro O_1), se non è assicurato l'equilibrio, inizia a ruotare intorno alla retta generatrice della sua superficie a contatto con il piano orizzontale, descrivendo un moto antiorario per un osservatore che guardi la figura. In figura abbiamo indicato con A il punto di intersezione della suddetta generatrice con il piano del foglio su cui sono rappresentati i tre cerchi raffiguranti i cilindri. La rotazione è determinata dai momenti meccanici delle due forze:

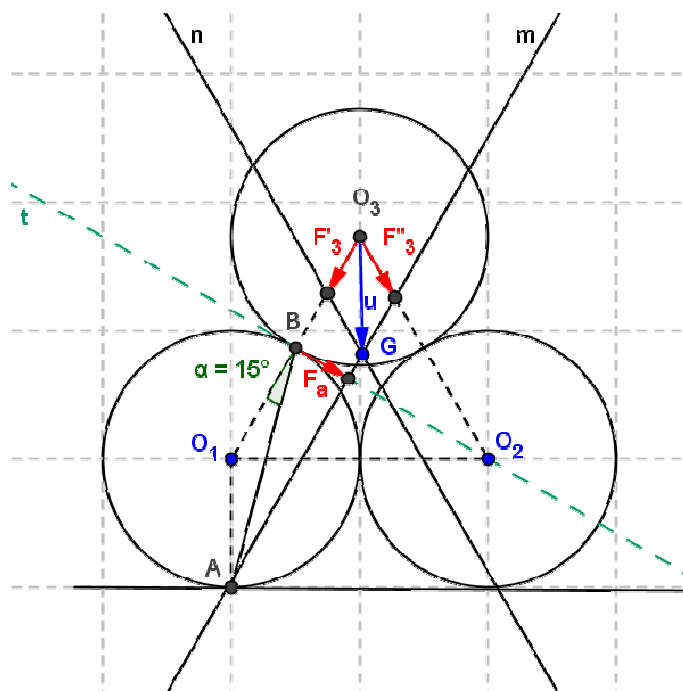
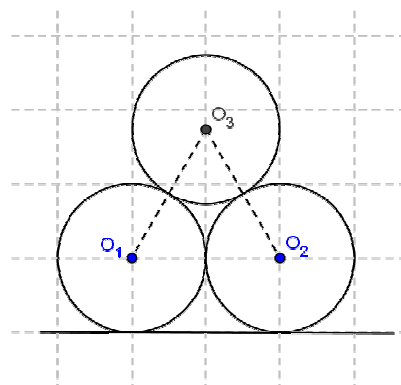
$\vec{F}'_3$ dovuta al peso del cilindro C_3 ;
 $\vec{F}_a$ la forza di attrito che si esercita tra le superfici a contatto dei due cilindri C_1 , C_3 , che dovrebbe impedire al cilindro C_1 di ruotare.

Determineremo i momenti delle due forze scegliendo come polo il punto A ed imporremo che la loro somma sia nulla. L'equazione ottenuta permetterà di determinare il valore minimo del coefficiente di attrito (statico) radente che può garantire l'equilibrio del sistema.

Elaborazioni

Osserviamo intanto che il triangolo $O_1O_2O_3$ avente per vertici i centri dei tre cerchi raffigurati è equilatero.

Ai fini della discussione la lunghezza dei cilindri non ha alcuna influenza sull'equilibrio (ideale) degli stessi, quindi possiamo schematizzare i cilindri come tre dischi (tre monete) aventi le stesse caratteristiche chimico-fisiche. Sia m la massa di uno dei tre cilindri. Il vettore peso del cilindro C_3 , $m\vec{g}$, si decompone nelle due componenti $\vec{F}'_3$, orientata da O_3 ad O_1 , $\vec{F}''_3$ orientata da O_3 ad O_2 :



¹ Problema assegnato nelle Olimpiadi di Fisica in Polonia e riportato sul testo : La Fisica per i Licei Scientifici, Vol.1-Quarta Edizione, Pag.380- Autore Ugo Amaldi

$\vec{mg} = \vec{F}'_3 + \vec{F}''_3$. I due vettori componenti, per simmetria, hanno la stessa intensità e poiché l'angolo formato da essi misura 60° , con semplici elaborazioni si deduce che i loro moduli valgono $F'_3 = F''_3 = \frac{mg}{\sqrt{3}}$.

La forza di attrito $\vec{F}_a$ che si esercita tra le superfici dei cilindri C_1, C_3 è direttamente proporzionale all'intensità della forza premente perpendicolarmente tra le superfici, cioè alla forza $\vec{F}'_3$; il suo valore massimo è dato dal prodotto dell'intensità di $\vec{F}'_3$ con il coefficiente di attrito radente statico, dunque $F_a = h \cdot \frac{mg}{\sqrt{3}}$.

Calcolo dei momenti torcenti di $\vec{F}'_3, \vec{F}_a$.

Scegliendo come polo per i momenti delle due forze il punto A, i due momenti sono:
 $\vec{M}_1 = \vec{AB} \wedge \vec{F}'_3, \quad \vec{M}_2 = \vec{AB} \wedge \vec{F}_a$

I due vettori $\vec{M}_1, \vec{M}_2$, sono perpendicolari al piano del foglio, con il primo avente verso uscente, il secondo verso entrante. Solo se i due vettori sono opposti sussisterà l'equilibrio del sistema meccanico. Poiché detti vettori sono paralleli (perché perpendicolari ad uno stesso piano), ed hanno versi opposti, dovranno avere la stessa intensità per l'equilibrio.

Ricordiamo che il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore la cui intensità è il prodotto dei moduli dei due vettori concorrenti per il seno dell'angolo formato dagli stessi (l'ampiezza dell'angolo deve essere compresa tra 0° e 180°).

Per l'intensità del momento $\vec{M}_1$, osserviamo che l'angolo formato dai due vettori $\vec{AB}, \vec{F}'_3$, ha ampiezza $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$, per cui risulta

$$M_1 = \overline{AB} \cdot F'_3 \cdot \sin(180^\circ - 15^\circ) = \overline{AB} \cdot \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \sin(15^\circ).$$

Per l'intensità del momento $\vec{M}_2$, l'angolo formato dai due vettori $\vec{AB}, \vec{F}_a$, da considerazioni geometriche sulla figura, si deduce che ha ampiezza 75° , per cui risulta

$$M_2 = \overline{AB} \cdot F_a \cdot \sin(75^\circ) = \overline{AB} \cdot h \cdot \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15^\circ$$

Uguagliando i moduli dei due vettori si ottiene l'equazione

$$\overline{AB} \cdot \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \sin(15^\circ) = \overline{AB} \cdot h \cdot \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15^\circ \text{ da cui } h = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \tan 15^\circ \approx 0,2679$$

Il valore ottenuto per il coefficiente di attrito radente statico h è evidentemente quello minimo che garantisce l'equilibrio; qualora tra le superfici a contatto il coefficiente di attrito abbia valore maggiore, continuerà a sussistere l'equilibrio del sistema meccanico.

Osservazione

Per quanto concerne il coefficiente di attrito radente μ tra piano e cilindri con le informazioni fornite non si può calcolare.